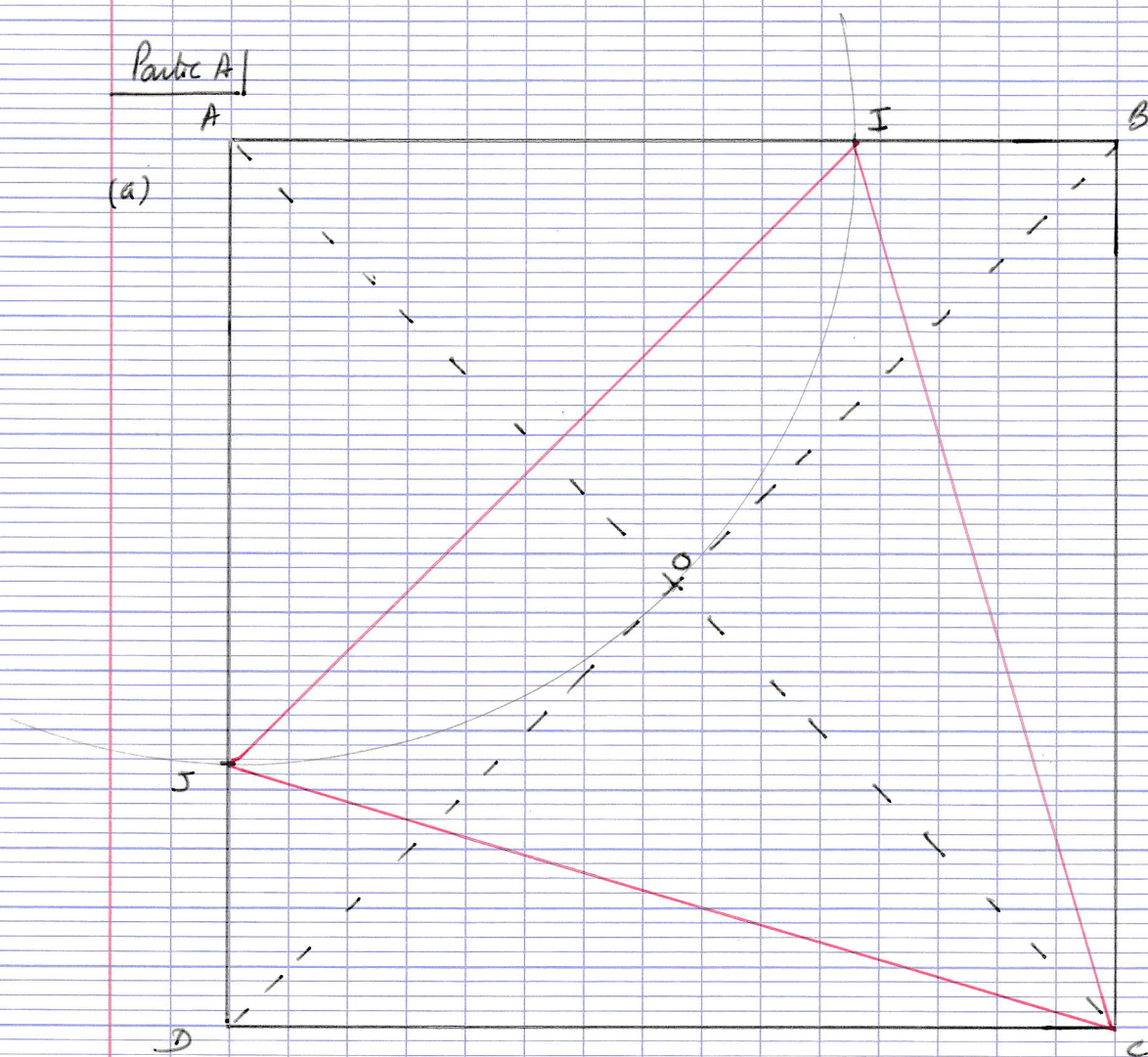


Pro2A - Triangle équilatéral dans un carré.



(b) Le triangle $(I)J$ ne semble pas équilatéral (c'est une conjecture).

(c) (i) On a A, B, D non alignés, donc (A, B, D) est un repère.
De plus, $AB = AD$ et $(AB) \perp (AD)$ donc ce repère est orthonormé.

(ii) Dans le repère (A, B, D)

$A(0; 0)$	$O(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$
$B(1; 0)$	$I(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0)$
$C(1; 1)$	$J(0; \frac{\sqrt{2}}{2})$
$D(0; 1)$	

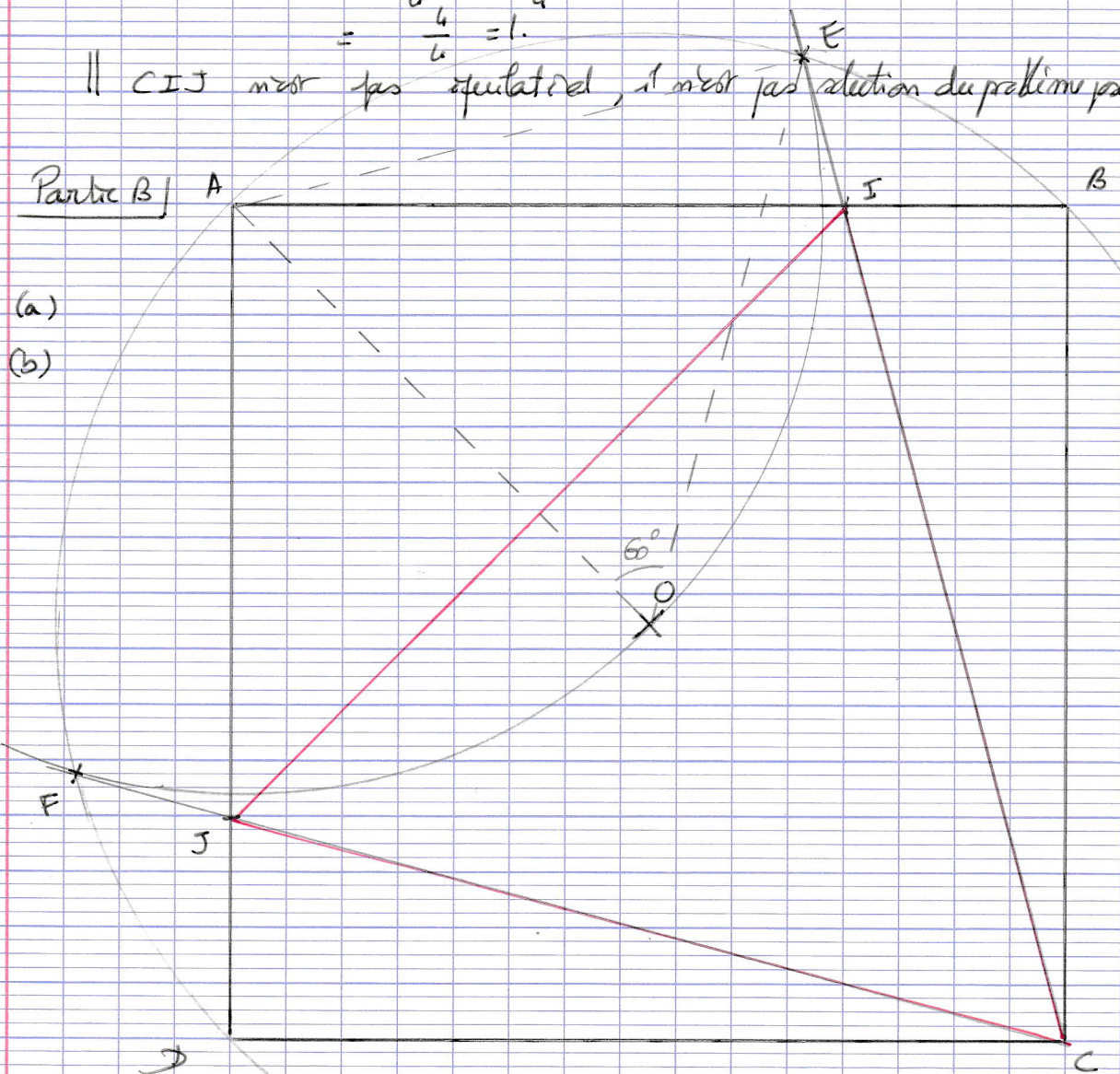
Car la diagonale d'un carré de côté c est $c\sqrt{2}$ (on démontre grâce au th. de Pythagore).

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad CI^2 &= (x_I - x_c)^2 + (y_I - y_c)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2 + (0 - 1)^2 \\ &= \frac{2}{4} - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 + 1 + 1 \\ &= \frac{1}{2} - \sqrt{2} + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} JS^2 &= (x_J - x_c)^2 + (y_J - y_c)^2 \\ &= (0 - 1)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} - \sqrt{2} + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} IS^2 &= (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \\ &= \left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right)^2 \\ &= \frac{2}{4} + \frac{2}{4} \\ &= \frac{4}{4} = 1. \end{aligned}$$

II CIJ n'est pas spéculatif, il n'est pas solution du problème pd.



Attention, ici, rappels importants sur la symétrie.

(c) Rappel - définition de la symétrie axiale.

Deux points M et M' sont symétriques par rapport à une droite Δ ssi Δ est la médiatrice de $[MM']$.

E et F sont sur un même cercle de centre A et de rayon $[OA]$,
et sur un même cercle de centre O et de rayon $[OA]$,
donc $AE = AF$, donc A est sur la médiatrice de $[EF]$,
et $OE = OF$, donc O est sur la médiatrice de $[EF]$,
donc (AO) est la médiatrice de $[EF]$.

Car dans un carré le centre est l'intersection des diagonales, A, O, C sont alignés, donc $(AO) = (AC)$.

Donc (AC) est la médiatrice de $[EF]$.

Donc E a pour image F dans la symétrie par rapport à (AC) .

Notation mathématique: $E \xrightarrow{S_{(AC)}} F$

Avec cette même notation mathématique (où la flèche $\rightarrow$ signifie "a pour image"):

$A \xrightarrow{S_{(AC)}} A$
 $E \xrightarrow{S_{(AC)}} F$
 $C \xrightarrow{S_{(AC)}} C$
 $B \xrightarrow{S_{(AC)}} D$

Donc:

$[AB] \xrightarrow{S_{(AC)}} [AD]$
 $[CE] \xrightarrow{S_{(AC)}} [CF]$

On note $\cap$ ("inter") l'intersection.

$[AB] \cap [CE] \xrightarrow{S_{(AC)}} [AD] \cap [CF]$

Finalement,

comme $[AB] \cap [CE] = \{I\}$ et $[AD] \cap [CF] = \{J\}$,

il vient:

$I \xrightarrow{S_{(AC)}} J$

Attention! Cette question appelle une démonstration rigoureuse comme ci-dessus, mais pas de "baratin"!

N.B.: l'utilisation des notations mathématiques est facultative, mais fortement conseillée par ceux qui choisissent la spécialité "maths".

u/4

(d) Par construction (points de cercles de rayon OA), on a $OA = OE = AE$, donc le triangle AOE est équilatéral.
Par suite $\widehat{AOE} = 60^\circ$
Par symétrie, on a donc $\widehat{EOF} = 120^\circ$.

Dans le cercle de centre O et de rayon OA ,
 $\widehat{EOF}$ est un angle au centre,
dont $\widehat{ICJ}$ est un angle inscrit interceptant le même arc.
(Sur "angles inscrits et angles au centre", voir sur le site Maths Langella, cours de Troisième, chapitre 17 « compléments de trigonométrie », dont on utilise ici la Pte 2).

Or on a un angle inscrit et un angle au centre interceptant le même arc, alors la mesure de l'angle au centre est le double de la mesure de l'angle inscrit.

|| Donc $\widehat{ICJ} = 60^\circ$.

Finalement, comme $I \xrightarrow{S_{EACD}} J$, $CI = CJ$;
de plus $\widehat{ICJ} = 60^\circ$, donc
|| le triangle ICJ est équilatéral.